

Juegos topológicos con pompas de jabón

José Luis Rodríguez Blancas

Área de Geometría y Topología
Universidad de Almería
jlrodri@ual.es

6.1 Presentación

El blog de Juegos Topológicos ¹ nace en 2008 con el fin de divulgar de manera intuitiva y manipulativa aspectos divertidos de la geometría, entre los estudiantes de secundaria.

Cuenta además con la colaboración de estudiantes de Matemáticas de la Universidad de Almería. En el blog proponemos experimentos sencillos con grafos, nudos, curvas, fractales, superficies, poliedros y policoros, entre otros. Para ello, además de los numerosos programas de visualización que existen en Internet, utilizamos materiales como papel, goma elástica, alambre, plastilina, cuerdas y pompas de jabón.

En este artículo recopilamos algunos de los momentos vividos en el taller, junto con algunas actividades más que nos han parecido interesantes incluir para su desarrollo en el aula de matemáticas.

Desde aquí queremos agradecer la invitación, por parte de los organizadores, a impartir este taller en la I Jornada del profesorado de Matemáticas de Almería.



Figura 6.1: Momento del taller. Más fotos en la [página web de la Jornada](#).

6.2 Burbujas de jabón y superficies de plastilina

La esfera es la superficie cerrada (sin borde) más simple. Desde un punto de vista geométrico es, de entre las superficies que encierran un cierto volumen, aquella que posee área mínima. Este hecho lo demostró el matemático alemán H. A. Schwartz en 1884 ². Una burbuja de jabón tenderá a ser esférica si no hay viento.

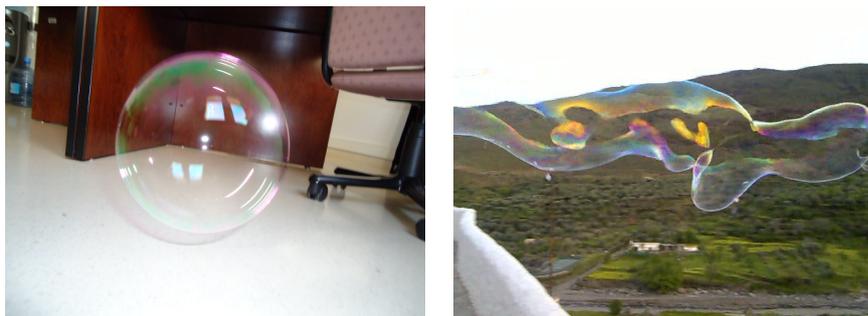
Desde un punto de vista topológico, los objetos son todavía más flexibles, como de plastilina o goma elástica y así, podemos pasar, por ejemplo, de una esfera a un cubo, y viceversa como puede observarse en la Figura 6.3.

Una propiedad que posee la superficie esférica es que cualquier lazo que se deslice libremente sobre ella, puede cerrarse hasta contraerse a un punto. Además esta propiedad la caracteriza completamente ³. Por ejemplo, la superficie de una rosquilla o toro, no cumple

¹<http://topologia.wordpress.com>.

²Podéis visitar también www.exploratorium.edu/ronh/bubbles/shape_of_bubbles.html.

³El matemático ruso Grigori Parelman probó en 2003 la famosa conjetura de Poincaré, por la que la esfera tridimensional es la única 3-variedad en la que todo lazo se contrae a un punto.



(a) Burbuja esférica pillada in fraganti. (b) Burbuja gigante deformada por el viento.

Figura 6.2: Diferentes burbujas con la forma topológica de la esfera.

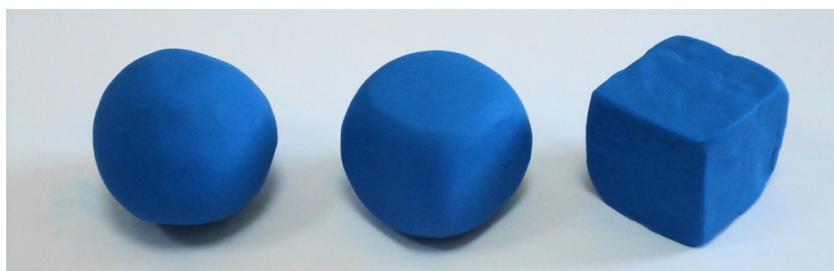
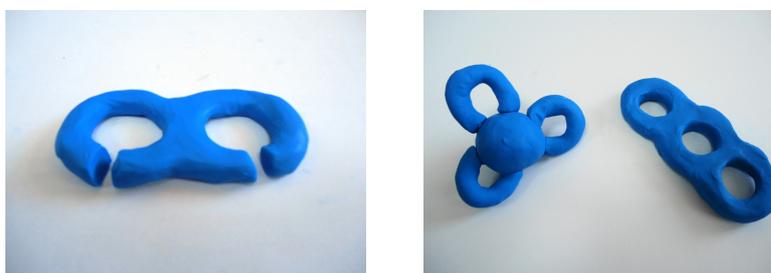


Figura 6.3: Transformación topológica de una esfera en un cubo.

esta propiedad. Efectivamente, los lazos que rodean al asa, tanto en un sentido como en otro, no se pueden cerrar.

El doble toro tiene dos asas. Todas las superficies orientables se pueden obtener pegando asas a una esfera. El número de asas empleadas se conoce como género de la superficie. Este número es un invariante topológico que mide el grado de conectividad, en el sentido de que indica el mínimo número de cortes completos que podemos dar a una superficie sin desconectarla.



(a) El doble toro admite dos cortes completos sin desconectarse y un tercer corte lo partiría en dos.

(b) Dos formas equivalentes del triple toro.

Figura 6.4: El doble toro y el triple toro. Todas las superficies orientables pueden obtenerse pegando asas a una esfera.

El doble toro es muy audaz: en la foto de la Figura 6.5a aparece agarrado por las dos asas, mientras que en la Figura 6.5b sólo por una. ¿Sabes cómo se ha escapado? ¿Podría hacer lo mismo el triple toro?

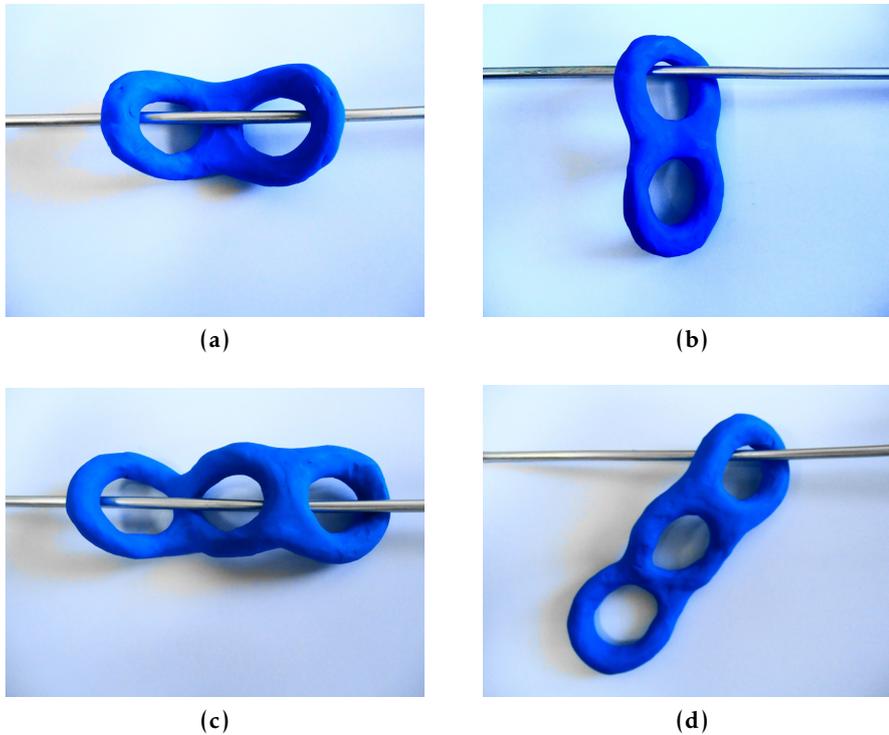


Figura 6.5: El paso de la figura (a) a la (b) se puede ver en el vídeo que aparece en la página web www.youtube.com/watch?v=S5fPwE7GQOA. ¿Es posible pasar de (c) a (d)?



Figura 6.6: Espectacular Keith Johnson formando un toro.

6.3 Juegos con cintas y nudos de alambre

La cinta de Möbius, como sabéis, es una superficie que tiene una sola cara.

En la Figura 6.7 mostramos una cinta de plástico por la que corre nuestro indalillo topológico, logo del blog. Se aprecia así que la cinta no es orientable pues el indalite, al completar una vuelta aparece del revés. El borde de la cinta de Möbius consta de una sola circunferencia, a diferencia de una cinta cilíndrica cuyo borde consta de dos circunferencias.

Introduciendo un alambre como el de la Figura 6.8a obtendremos una cinta de Möbius y con dos alambres redondos, obtendremos un catenoide (Figura 6.8b), topológicamente un cilindro, cuya generatriz es la catenaria o curva que resulta al sostener una cadena por sus extremos.



Figura 6.7: Cinta de Möbius de plástico.



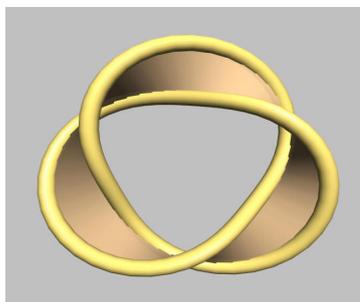
(a) Cinta de Möbius.



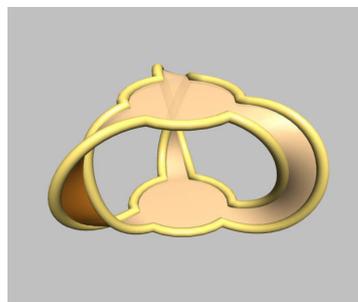
(b) Catenoide.

Figura 6.8: Cinta de Möbius y Catenoide elaborados con jabón. La imagen de la catenoide se ha extraído de www.uam.es/otros/hojavol/pdfs/hoja13.pdf.

Introduciendo nudos o enlaces tóricos en agua jabonosa podemos obtener cintas cilíndricas o de Möbius más enrolladas. Por ejemplo, un nudo de trébol daría lugar a una cinta de Möbius con tres medias vueltas. Cambiando la forma del nudo de trébol podemos obtener otra superficie distinta, esta vez orientable, es decir con dos caras. Esta superficie se puede formar con dos discos de papel unidos por tres tiras tal y como muestra la Figura 6.9. De hecho, todo nudo es borde de alguna superficie orientable tal y como probó el matemático alemán Herbert Seifert en 1934.



(a) Cinta de Möbius con tres medias vueltas.



(b) Superficie orientable de Seifert.

Figura 6.9: Imágenes obtenidas con el programa SeifertView de Jack van Wijk. Son dos superficies con borde el nudo de trébol pero dispuesto de distinta manera.

Al cortar una cinta de Möbius por su mitad longitudinalmente se obtiene una cinta cilíndrica con 2 vueltas. Se pueden cortar cintas enrolladas con 3, 4 (o más) medias vueltas y observar los distintos enlaces de cintas cilíndricas y de Möbius que resultan.

La botella de Klein entusiasma mucho a los estudiantes. Se trata de una superficie cerrada no orientable, y por tanto con una sola cara, sin interior ni exterior, tal y como se puede mostrar fácilmente «introduciendo» líquido en ella.

En la Figura 6.10 se puede observar la botella de Klein más grande del mundo (www.kleinbottle.com).

Las superficies que hemos mostrado se pueden obtener cortando y cosiendo retales, al menos teóricamente. La siguiente tabla muestra como obtener todas las superficies cerradas⁴ a partir de discos, cilindros y cintas de Möbius, cosiéndolas por sus borde:

Superficie 1	Superficie 2	Superficie cerrada resultante
Disco	Disco	Esfera
Cilindro o esfera con 2 agujeros	Cilindro o asa	Toro
Esfera con $2g$ agujeros	g cilindros o asas	Unión de g toros
Disco o esfera con 1 agujero	Cinta de Möbius	Plano proyectivo (ver el blog)
Cinta de Möbius	Cinta de Möbius	Botella de Klein
Esfera con g agujeros	g cintas de Möbius	Unión de g planos proyectivos



Figura 6.10: Botella de Klein.

6.4 Juegos con poliedros y policoros

Los poliedros, y en particular los cuerpos platónicos, son siempre un tema muy interesante para tratar en el aula de matemáticas desde muchos puntos de vista. Se puede estudiar su dualidad y simetrías, sus distintas sombras, ejemplos de poliedros que aparecen en la naturaleza, etc.

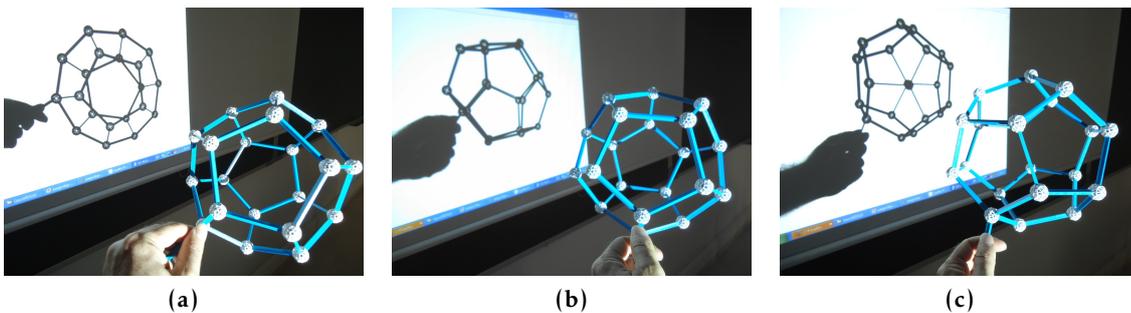


Figura 6.11: Sombras de un dodecaedro.

Podemos considerar también su característica de Euler χ , que viene dada por $\chi = v - a + c$, donde v , a y c son el número de vértices, aristas y caras respectivamente del poliedro. Por ejemplo, todos los cuerpos platónicos, y de hecho cualquier poliedro con la forma topológica de una esfera, tienen característica de Euler 2.

⁴En este artículo nos referimos sólo a superficies compactas y conexas. Su clasificación culminó en 1925 con un teorema de Radó que aseguraba que toda superficie compacta es triangulable –y por tanto formada por un número finito de triángulos–, resultado crucial que permitía manipular las superficies de forma combinatoria.

El hipercubo es un policoro que vive en el espacio de 4 dimensiones; está formado por 8 cubos macizos pegados entre sí, de modo similar a como un cubo está formado por 6 cuadrados pegados.

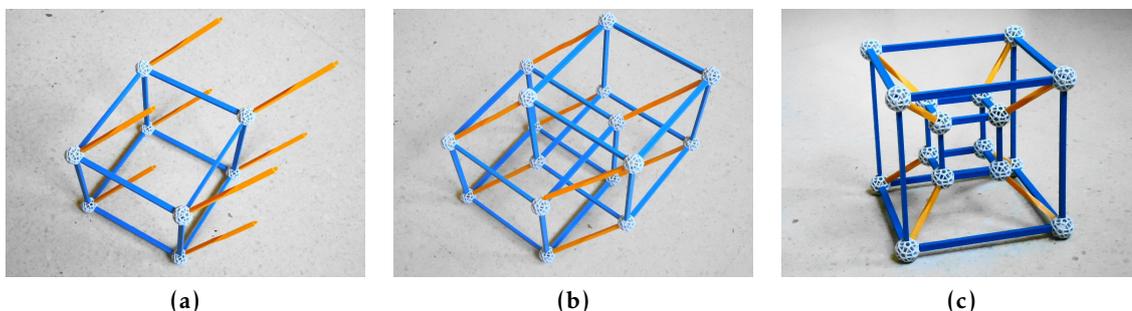


Figura 6.12: El hipercubo visto como un cubo en movimiento. En la última foto, diagrama de Schlegel del hipercubo, donde el cubo se mueve en dirección al centro.

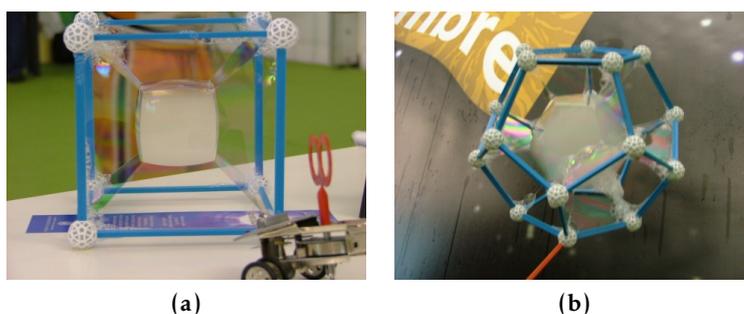


Figura 6.13: Un hipercubo y una burbuja dodecaédrica con humo (Semana de la Ciencia en la UAL 2009). ¿Se podrá formar una burbuja icosaédrica?

El matemático suizo Ludwig Schaffli descubrió a mediados del siglo XIX que había exactamente seis policoros regulares: 5 de ellos son los análogos a los 5 cuerpos platónicos: el hipertetraedro (5 celdas tetraédricas), el hipercubo (8 celdas cúbicas), el hiperoctaedro (16 celdas tetraédricas), el hiperdodecaedro (120 celdas dodecaédricas), y el hipericosaedro (600 celdas tetraédricas). Pero existe otro policoro regular, el icositetraedro (con 24 celdas octaédricas), que no tiene similar en otras dimensiones. En la Figura 6.14 podéis ver los seis policoros regulares.

Una forma posible de nuestro universo es la esfera de Poincaré, tal y como propusieron en 2003 varios autores⁵. La esfera de Poincaré es un espacio tridimensional cerrado que se obtiene al identificar las caras opuestas de un dodecaedro macizo, después de girar $2\pi/5$ cada cara. Un ser que viviese en dicho espacio vería exactamente 120 copias de sí mismo, distribuidas según el 120-cell o hiperdodecaedro. Esta hipótesis se basa en observaciones de patrones repetidos en imágenes del fondo de radiación cósmica aportadas por la sonda WMAP. La sonda

⁵J.-P. Luminet, J. Weeks, A. Riazuelo, R. Lehoucq, J.-P. Uzan: Dodecahedral space topology as an explanation for weak wide-angle temperature correlations in the cosmic microwave background, Nature (Nature) 425 (6958): 593, 2003

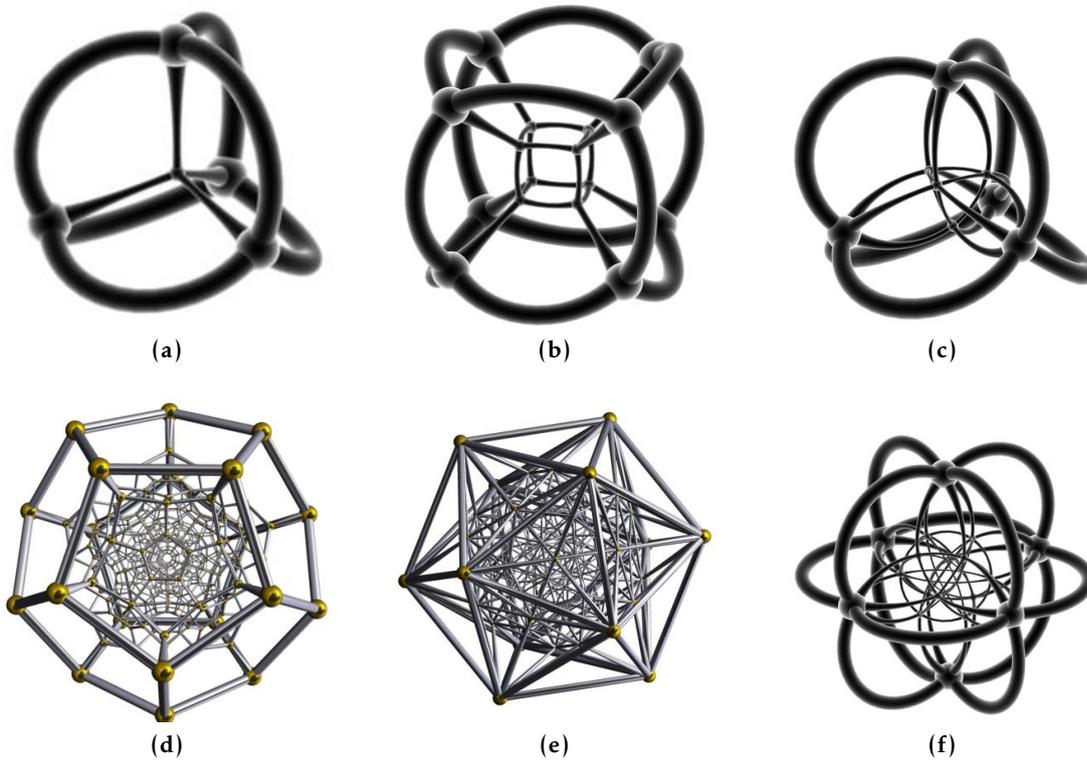


Figura 6.14: Los 6 policoros regulares con JENN3D www.jenn3d.org y ESTELLA www.software3d.com. Podéis verlos tambien en www.dimensions-math.org.

espacial Planck, lanzada al espacio en primavera de 2009 (ver www.esa.int/science/planck) ayudará a determinar mejor la curvatura de nuestro universo, su edad o tamaño y forma.

Un modelo del 120-cell se puede obtener teóricamente con pompas de jabón. El hiperdó comercial de ZOME es una proyección del diagrama de Schlegel del 120-cell.



(a) Imagen por ordenador del 120-cell creada por John Sullivan



(b) El Hiperdo de Zome al fondo, junto a otros objetos mostrados en el taller

Figura 6.15:

6.5 Característica de Euler de superficies

La característica de Euler es un invariante topológico que depende únicamente de la forma topológica del objeto, es decir, no depende de la triangulación o parcelación del mismo, como hemos visto con los cuerpos platónicos. Por ejemplo, podemos proponer en clase que triangulen la cinta de Möbius y vean que su característica de Euler es 1; que vean que el toro y la botella de Klein tienen característica de Euler 0, y que lo que las distingue es su orientabilidad.

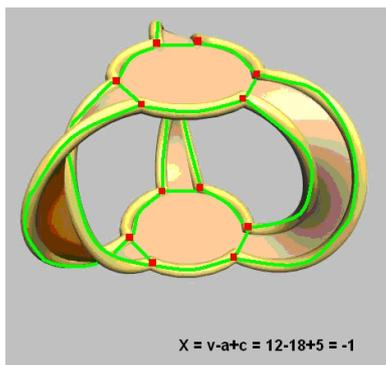


Figura 6.16: Cálculo de la característica de Euler de una superficie de Seifert.

Así, la característica de Euler nos proporciona un método efectivo para conocer la superficie topológica que tenemos entre manos, ya sea con o sin borde. La relación entre el género y la característica de Euler, en el caso de una superficie orientable –unión de g toros–, viene dada por $\chi = 2 - 2g$ y en el caso de no ser orientable –unión de g planos proyectivos–, $\chi = 2 - g$. Si tenemos una superficie S' orientable de género g con borde r circunferencias, entonces su característica de Euler es $\chi' = 2 - 2g - r$, pues cada circunferencia del borde puede verse como el borde de una cara que se ha quitado. Por ejemplo, para la superficie de Seifert de la Figura 6.9b tenemos $r = 1$, pues el borde es una sola circunferencia, el nudo de trébol y por otro lado $\chi = -1$, como calculamos en la Figura 6.16. Luego $g = 1$ y por tanto esta superficie resulta ser un toro con un agujero.

6.6 Más juegos con pompas de jabón

Son muchos los recursos disponibles en la literatura y en Internet sobre pompas de jabón y su abstracción matemática, llamadas superficies minimales. Para terminar, comentaremos solo algunas figuras y experimentos más que podemos realizar en nuestra aula de matemáticas con pompas de jabón.

La superficie de Schrerck es una superficie minimal en forma de silla de montar que se obtiene a partir de un cubo al que le faltan varias aristas tal y como aparecen en la Figura 6.17.

En general se cumple que si la pompa de jabón no encierra aire, entonces su curvatura media es 0, su curvatura de Gauss es negativa.

Por otro lado las burbujas de jabón se amontonan siguiendo las conocidas leyes de Plateau:

- *Primera ley:* Una película de jabón corta a una superficie rígida deslizante formando un ángulo de 90° .
- *Segunda ley:* Las películas de jabón se encuentran en una arista de tres en tres y formando un ángulo de 120° .
- *Tercera ley:* Estas aristas se encuentran de cuatro en cuatro en un vértice, con un ángulo tetraédrico (aproximadamente $109,47^\circ$).

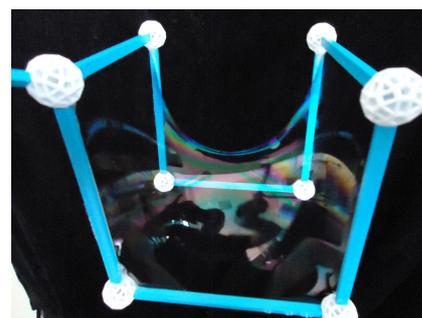
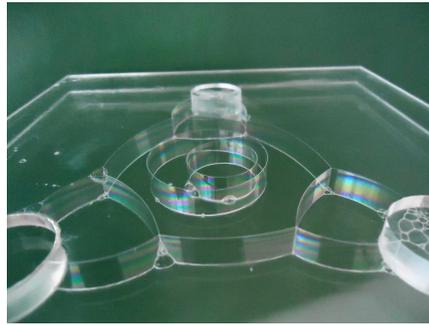


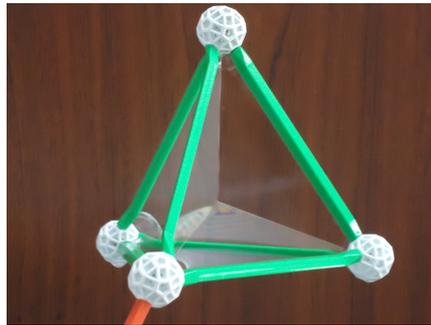
Figura 6.17: Superficie de Schrerck, descubierta en 1834.



(a) Primera.



(b) Segunda.



(c) Tercera.

Figura 6.18: Ilustraciones de las leyes de Plateau.

Hemos comentado al principio de todo que la esfera es la superficie con área mínima, de entre todas las superficies que encierran un volumen dado. La pompa doble (ver Figura 6.19) es también la superficie con área mínima, entre aquellas que encierran dos volúmenes dados (no necesariamente iguales). La demostración la obtuvieron recientemente M. Hutchings, F. Morgan, M. Ritoré y A. Ros en 2000.

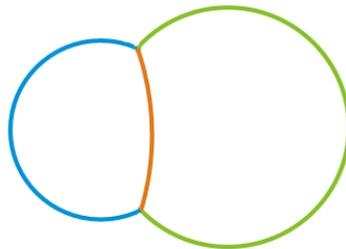
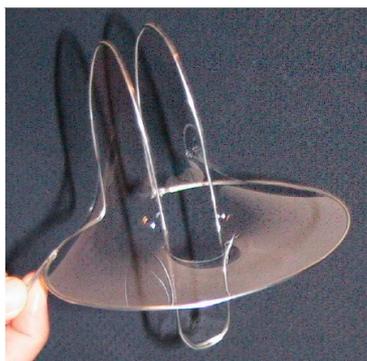


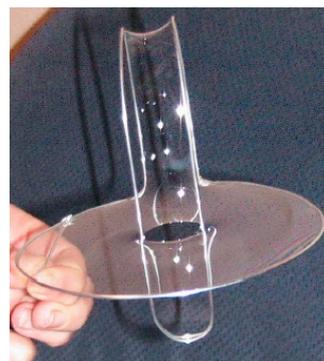
Figura 6.19: En una pompa doble, la pequeña de radio r_1 «empuja» a la grande de radio r_2 , y no al revés como cabría esperar, en la intersección aparece otra porción de esfera de radio R , donde $1/R = 1/r_1 - 1/r_2$. Véase «Double bubble» en Mathworld.

Las superficies minimales se llaman así porque minimizan el área, para un contorno y/o volumen fijo. Observar que el término «minimal» se refiere a que puede ser un mínimo relativo, no necesariamente absoluto como pasa por ejemplo en la Figura 6.20 con fotos de Vicente Muñoz ⁶.

⁶ www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ehernan/Talento/VicenteMunoz/pompas.pdf



(a) La superficie que se forma naturalmente con este alambre es minimal pero no es la mínima.



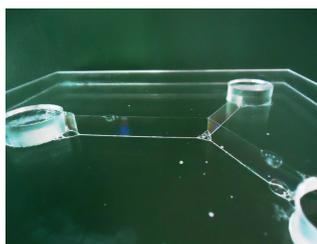
(b) Para lograr esta segunda superficie, que sí tiene área mínima, hay que juntar los dos extremos superiores y romper una ojiva.

Figura 6.20: Dos pompas que tienen el mismo contorno. Se puede ver el video en el que se muestra esta construcción en www.youtube.com/watch?v=o7v56xhZM7.

Las propiedades minimales de las pompas de jabón se utilizan en varios contextos ⁷ como la arquitectura e ingenierías.



(a) Cubiertas del estado olímpico de Munich (1972) diseñadas con pompas de jabón.



(b) Grafo de longitud mínima obtenido entre dos planchas unidas por tres nodos.

Figura 6.21: Aplicaciones de las propiedades minimales de las pompas de jabón.

Concluimos con otro experimento que podréis encontrar ampliado en nuestro blog. Si atamos trozos de hilo a un alambre cerrado, la propiedad minimal de la superficie de jabón obliga a maximizar el área del hueco que queda en torno al hilo. Esto hace que aparezcan un arco de circunferencia, un arco de circunferencia que forma 90° con el borde o una circunferencia móvil, en los casos respectivos de tener los extremos del hilo fijados, móviles en el borde o completamente sueltos.

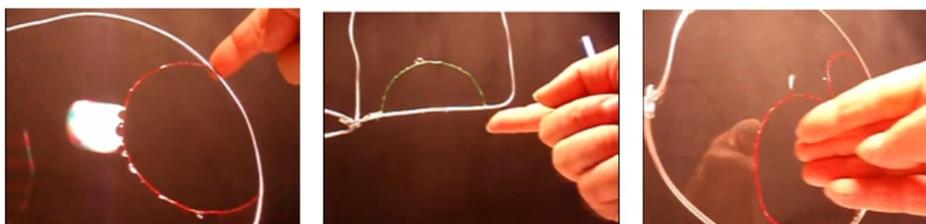


Figura 6.22: Pompas de jabón en alambres con hilos atados y sueltos.

⁷Podéis ver más experimentos en la sección «Matemáticas con pompas de jabón en 2D» que aparece en el blog i-matematicas.com.